Εισαγωγή στις διαφορικές εξισώσεις: 09-01-20

$a_2(x)y'' + a_1(x)y'(x) + \alpha_0 y(x) = 0$, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in C(I)$

$x_0 \in I$.

$$y'' + \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} y'(x) + \frac{\alpha_0}{\alpha_2(x)} y(x) = 0.$$

Αν x_0 ~~...~~ δεν είναι ομαλό σημείο (ανώμαλο σημείο) όταν $\alpha_2(x_0) = 0$ V κάποια $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \frac{\alpha_0}{\alpha_2}$ δεν είναι αναλυτική στο σημείο x_0.

<u>κανονικά</u>: $\exists$ συναρτήσεις A_1, A_0 αναλυτικές στο x_0 και τέτοιες ώστε $(x-x_0)\alpha_1(x) = \alpha_2(x) A_1(x)$

$(x-x_0)a_0(x) = a_2(x) A_0(x)$

$$\frac{\alpha_1(x)}{a_2(x)}(x-x_0) = A_1(x)$$

$$\frac{a_0(x)}{\alpha_2(x)}(x-x_0) = A_2(x).$$

Παρ 1/233

i) $y'' + (\cos x)y' + e^x y = 0.$

ii) $(x-2)y'' + (\sin(2x))y' + (x^2+1)y = 0.$

$a_2(x) = x-2$ Το σημείο 2 είναι ανώμαλο σημείο.

$\frac{\sin 2x}{x-2}(x-2) = \sin(2x) = A_1(x)$ Είναι αναλυτική συνάρτηση σε όλο το $\mathbb{R}$.

$\frac{x^2+1}{x-1}(x-1)^2 = A_0(x)$ Είναι αναλυτική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

(ιιι) $y'' + |x|y' + (x+1)^{1/3} y = 0.$

$a_2(x) = 1$
$\alpha_1(x) = |x|$
$\alpha_0(x) = \sqrt[3]{x+1}$ ορίζονται σε όλο το $\mathbb{R}$ οι συναρτήσεις.

Στην $\alpha_1(x) = |x|$ $\left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \end{array}\right\}$ ανώμαλα σημεία.

$\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}(x-x_0) = |x| \cdot x$ Δεν είναι αναλυτική γιατί δεν έχει όλους τους παραγώγους γύρω από το 0.

$\left(\sqrt[3]{x+1}\right)(x^2)$ Στο -1 δεν είναι αναλυτική άρα είναι μη κανονικό ανώμαλο σημείο.

ΘΕΩΡΗΜΑ x_0: κανονικό ανώμαλο σημείο.

$$A_1(x) = (x-x_0)\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (x-x_0)^n, \quad 0 < |x-x_0| < R_1$$

$$A_0(x) = (x-x_0)^2 \frac{\alpha_0(x)}{\alpha_2(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (x-x_0)^n, \quad 0 < |x-x_0| < R_2$$

Ας είναι λ_1, λ_2 ρίζες της (ενδεικτικής) εξίσωσης
$p(\lambda) = \lambda^2 + (p_0 - 1)\lambda + q_0 = 0$ με $Re\lambda_2 \leq Re\lambda_1$.
$R = \min\{R_1, R_2\}$
Τότε η συνάρτηση $y_1(x) = |x-x_0|^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n, \quad 0 < |x-x_0| <$

με $c_0 = 1$ είναι μια λύση της (Ε)

Μια άλλη λύση y_2 που είναι γραμμ. ανεξ της y_1

(i) $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{N}$. $\quad y_2(x) = |x-x_0|^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x-x_0)^n, \; d_0 = 1$

Παράδειγμα: $2x^2 y'' + (x-x^2)y' - y = 0 \quad , x_0 = 0.$

$\alpha_2(x) = 2x^2 \Rightarrow \alpha_2(x_0) = \alpha_2(0) = 0 \sim x_0$ ανώμαλο σημείο

$x \cdot \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \frac{x-x^2}{2x^2} x = \frac{x(1-x)}{2x^2} x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} x = A_1(x)$

$R_1 = +\infty.$

$p_0 = -1/2$

Άρα

$A_0(x) = -\frac{1}{2x^2} \cdot x^2 = -\frac{1}{2}$ είναι αναλυτική

$R_2 = +\infty$

Άρα το σημείο είναι κανονικό ανώμαλ.

Οπότε και $R = +\infty \quad , q_0 = -1/2$

$c_0 = 1. \quad \lambda^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)\lambda + \left(-\frac{1}{2}\right) = q_0 \Rightarrow \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} = 0$ $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$y_1(x) = |x|^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad , y_1(x) = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}$

$y_1'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_n x^n$

$y_1''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot n c_n x^{n-1}$

$0 = 2x^2 \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot n c_n x^{n-1} \right) + (x-x^2) \sum c_n (n+1) \cdot x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} 2n(n+1) c_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+1) x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+1) x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2n(n+1)c_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+1)x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2n(n+1) c_n x^{n+1} + \cancel{c_0 x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(n+1)x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} n x^{n+1} -$$

$$- \cancel{c_0 x} - \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n+1}$$

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} \left[2n(n+1) c_n + (n+1)c_n - n c_{n-1} - c_n \right]$$

$$\left[2n(n+1) + (n+1) - 1 \right] c_n = n c_{n-1} \quad n = 1, 2$$

$$2n^2 + 2n + n + 1 - 1$$

$$n(2n+3) c_n = n c_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$c_n = \frac{1}{2n+3} c_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$c_n = \frac{1}{2n+3} c_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

- $n = 1 \qquad c_1 = \frac{1}{5} c_0$

- $n = 2 \qquad c_2 = \frac{1}{7} c_1 \qquad c_n = \frac{1}{2n+3} c_{n-1}$

$$c_n = \frac{1}{5 \cdot 7 \cdots (2n+3)}, \quad n = 1, \ldots$$

$$y_1(x) = |x|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad c_0 = 1$$

$$y_1(x) = |x| \cdot \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot x^n}{5 \cdot (2n+3)} \right].$$

$$y_2(x) = |x|^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$$

$y_1(x) - \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^{n-\frac{1}{2}}$, $0 < x$, $c_0 = 1$.

$$0 = 2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n-\tfrac{1}{2})(n-\tfrac{3}{2})\, c_n x^{n-\frac{5}{2}} + (x-x^2)\cdot \sum_{n=0}^{\infty} d_n (n-\tfrac{1}{2}) x^{n-\frac{3}{2}}$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^{n-\frac{1}{2}}.$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2(n-\tfrac{1}{2})(n-\tfrac{3}{2})\, c_n x^{n-\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} d_n (n-\tfrac{1}{2}) x^{n-\frac{1}{2}} - \sum_{n=0}^{\infty} d_n (n-\tfrac{1}{2}) x^{n+\frac{1}{2}}$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^{n-\frac{1}{2}}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n-\tfrac{1}{2})(n-\tfrac{3}{2})\, c_n x^{n-\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} d_n (n-\tfrac{1}{2}) x^{n-\frac{1}{2}} - \sum_{n=1}^{\infty} d_{n-1} (n-\tfrac{3}{2}) x^{n-\frac{1}{2}} - \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^{n-\frac{1}{2}}.$$

...

$$(n-\tfrac{3}{2})(2n d_n - d_{n-1}) = 0 \quad , n = 1, 2, \ldots$$

$$\Rightarrow \quad d_n = \frac{1}{2n} d_{n-1} \quad , n = 1, 2.$$

$d_1 = \frac{1}{2\cdot 1} d_0$

$d_2 = \frac{1}{2\cdot 2} d_1$

$d_3 = \frac{1}{2\cdot 3} d_2$

$\ldots\ldots$

$d_n = \frac{1}{2n} d_{n-1}$

$$d_n = \frac{1}{2^n (1.2 \ldots n)} = \frac{1}{2^n n!} \quad , n = 1, 2$$

$$y_2(x) = |x|^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/2)^n}{n!} = e^{x/2} \quad \Rightarrow y_2(x) = |x|^{-1/2} e^{x/2}$$

(ii) $\lambda_1=\lambda_2$ $\quad y_2(x)=y_1(x)\log|x-x_0|+|x-x_0|^{\lambda_2}\sum d_n(x-x_0)^n$

$\lambda_1=0.$

Παράδειγμα 2

$$x^2y''-(x^2+x)y'+y=0, \quad x_0=0.$$

$\alpha_2(x)=x^2 \Rightarrow \alpha_2(0)=0 \rightsquigarrow$ Άρα 0 είναι ανώμαλο σημείο.

$$A_1(x)=\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}x=\frac{-(x^2+x)}{x^2}x=\frac{-x(x+1)}{x^2}x=-1-x$$

$R_1=+\infty.$

$A_0(x)=\frac{1}{x^2}\cdot x^2=1 \rightsquigarrow R_2=+\infty$ είναι αναλυτική

και $q_0=1.$

$$\lambda^2+(-1-1)\lambda+1=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=1$$

$R=\infty, \quad \lambda_1=\lambda_2=1, \quad 0<x.$

$$y_1(x)=x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+1}, \quad c_0=1.$$

αντικατάστασης

$\hookrightarrow nc_n=c_{n-1}, \quad n=1,2,\dots$

$$\boxed{\begin{array}{l} c_n=\frac{1}{n}c_{n-1}, \quad n=1,2 \\ c_0=1 \end{array}}$$

$c_n=\frac{1}{n!} \quad \boxed{n\geq 0}$

$$y_1(x)=|y|\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=|x|\cdot e^x, \quad \boxed{x\neq 0.}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cdot x^{n+1}$$

$0<x$

$$y_2(x)=y_1(x)\log x+x\sum_{n=0}^{\infty}d_nx^n, \quad d_0=0.$$

$-(x^2+x)\cdot$ $y_2'(x) = y_1'(x)\log x + \frac{1}{x} y_1(x) + \sum_{n=0}^{\infty} d_n (n+1) x^n$

$x^2\cdot$ $y_2''(x) = y_1'' \log x + 2y'(x)\cdot\frac{1}{x} + y_1(x)\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} d_n(n+1)n x^{n-1}$

$$0 = \log x \, [\overset{\text{λύση}}{L(y)}\to 0] + 2x y_1'(x) + y_1(x) + \sum_{k=0}^{\infty} d_n (n+1) n x^{n+1} - x y_1(x)$$

$$- y_1(x) - (x^2+x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^{n+1}$$

$$\begin{cases} d_n = \frac{1}{n} d_{n-1} - \frac{1}{n\, n!}, & n = 1, 2, \ldots \\ d_0 = 0 \end{cases}$$

$d_1 = -\frac{1}{1}$

Αυτός ο τύπος δεν επιλύεται γιατί δεν έχει κλειστό τύπο.

$d_2 = \frac{1}{2} d_1 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$

(iii) $\lambda_1 - \lambda_2$ θετικός ακέραιος $y_2(x) = c\, y_1(x)\log|x-x_0| + |x-x_0|^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} (x-x_0)^n$.

$d_0 = 1$.

Παράδειγμα 3. $x^2 y'' - xy + 8(x^2-1)y = 0$, $x_0 = 0$

$A_1(x) = x \cdot \frac{-x}{x^2} = -1 \rightsquigarrow P_0 = -1$

$R = +\infty$.

$A_0(x) = x^2 \cdot \frac{8(x^2-1)}{x^2} = -8 + 8x^2$, $q_0 = -8$

$\lambda^2 + (-1-1)\lambda - 8 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0 \begin{cases} 4 = \lambda_1 \\ -2 = \lambda_2 \end{cases}$

$d_1 = d_3 = d_5 = 0.$

$d_0 = d_2 = d_4 = 1.$

$n(n+6)\, d_{n+6} + 8\, d_{n+4} + 2\, c_1 (n+3)\, c_n = 0 \,, \; n = 0, 1, 2.$

$n=0$ έχουμε $8 d_4 + 6 c \cdot 1 = 0.$

$$c_1 = -\frac{8 \cdot 1}{6} = -4/3.$$